16.3.08 ①

מתמטיקה בדידה - שיעור

סיכום פונקציות יוצרות

$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ היא הפונקציה היוצרת (הרגילה) של הסדרה $a=\lambda n\in\mathbb{N}.a(n)$

<u>אבחנה מרכזית</u> אם $d(n)$ הוא מספר הדרכים לחלק n כדורים <u>זהים</u> למספר תאים תחת אילוצים מסוימים על מספרי הכדורים בתאים הימניים ואילוצים מסוימים על מספרי הכדורים בתאים השמאליים (אך אין אילוץ שמקשר בין תאי שמאל לתאי ימין)

אז $d(n)=\sum_{k=0}^{n} a(k)\,b(n-k)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ (קונבולוציה)

כאשר:

$a(n)$ מספר הדרכים לחלק n כדורים זהים לתאים השמאליים, תחת האילוצים המתאימים.

$b(n)$ מספר הדרכים לחלק n כדורים זהים לתאים הימניים, תחת האילוצים הימניים.

ולפיכך $$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n=\lambda x.\left(\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n\right)$$

מכאן ניתן להסיק שאם אין כלל אילוצים הקושרים בין תאים שונים אז

$$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n=\lambda x.\left(\sum_{n\in A_1}x^n\right)\left(\sum_{n\in A_2}x^n\right)\dots\left(\sum_{n\in A_m}x^n\right)$$ (כאשר מספר הכדורים בתא ה-i מוגבל להיות שייך ל-A_i - זה האילוץ על התא ה-i)

<u>מה קורה כאשר הכדורים שונים</u>

בפונקציה שתוארה באבחנה המרכזית, נסמן $\tilde{d}(n)$ - מספר הדרכים לחלק n כדורים <u>שונים</u> לתאים לפי האילוצים.

$\tilde{a}(n)$ - מספר הדרכים לחלק n כדורים שונים לתאים השמאליים לפי האילוצים

$\tilde{b}(n)$ - מספר הדרכים לחלק n כדורים שונים לתאים הימניים לפי האילוצים

$$\tilde{d}(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tilde{a}(n)\,\tilde{b}(n-k)$$

נוצרה לנו בעיה כיוון שהנוסחה החדשה אינה מתאימה לקונבולוציה של הפונקציות היוצרות. נפתור זאת ע"י חלוקה ב-$n!$ והצבה מתאימה של השאר:

$$\frac{1}{n!}\tilde{d}(n)=\sum\left(\frac{1}{k!}\tilde{a}(k)\right)\left(\frac{1}{(n-k)!}\tilde{b}(n-k)\right)$$

מכאן,

$$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tilde{d}(n)}{n!}\right)x^n=\lambda x.\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tilde{a}(n)}{n!}x^n\right)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tilde{b}(n)}{n!}x^n\right)\right)$$

מתמטיקה בדידה - שעור

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{n!} x^n$ נקראת הפונקציה היוצרת <u>המעריכית</u> של הסדרה $\lambda n \in \mathbb{N}.a(n)$,

כמו קודם, יש לנו כלל דומה [illegible]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(n)}{n!} x^n = \lambda x . \left(\sum_{n \in A_1} \frac{x^n}{n!}\right) \cdots \left(\sum_{n \in A_i} \frac{x^n}{n!}\right)$$

תרגיל מסכם בנושא פונקציות יוצרות

(ת.ב) מה מספר הדרכים לחלק n כדורים ל-4 תאים, כך שמספר הכדורים בתא הראשון זוגי, מספר הכדורים בתא השני זוגי והתא הרביעי אינו ריק,
כאשר:
א. הכדורים זהים
ב. הכדורים שונים

[illegible]

<u>פתרון</u>

א. נסמן ב $d(n)$ את התשובה המבוקשת.

[illegible]

$$\lambda x . \sum_{n=0}^{\infty} d(n) x^n = \lambda x . \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_{even}} x^n\right)\left(\sum_{n \in \mathbb{N}_{even}} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_{even}} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1-x^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} = x + x^2 + x^3 \ldots = x(1 + x^2 + x^3 \ldots) = \frac{x}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

ואם כן,

$$\lambda x . \sum_{n=0}^{\infty} d(n) x^n = \lambda x . \frac{x}{(1-x^2)^2(1-x)^2} = \lambda x . \frac{x}{(1-x)^4(1+x)^2}$$

$$= \lambda x . \frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^4} + \frac{0}{(1-x)^3} + \frac{-\frac{1}{16}}{(1-x)^2} + \frac{-\frac{1}{16}}{(1-x)} + \frac{-\frac{1}{16}}{(1-x)^2} + \frac{-\frac{1}{16}}{1+x}$$

[illegible]

$$= \lambda x . \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} S(4,n) x^n - \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty} S(2,n) x^n - \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty} S(2,n)(-1)^n x^n - \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$= \lambda x . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16}\left[4S(4,n) - S(2,n) - 1 - S(2,n)(-1)^n - (-1)^n\right] x^n$$

לסיכום,

$$d(n) = \frac{1}{16}\left[4S(4,n) - \underbrace{S(2,n) - 1 - S(2,n)(-1)^n - (-1)^n}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[4\binom{n+3}{3} - (n+2)(1+(-1)^n)\right]$$

16.3.08 (3)

מתמטיקה בדידה - שיעור

ב. נסמן ב $\tilde{d}(n)$ את התשובה המבוקשת.

$$\lambda x. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{d}(n)}{n!} x^n = \lambda x. \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{even}} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{even}} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$$

סוף
כלומר בשאלה הזו של סוף והכרזת שלנו (קיימים לוגי כי זוגי) או לא לא ריק

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_{even}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

וכמו כן,

$$\lambda x. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(n)}{n!} x^n = \lambda x. \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cdot e^x(e^x - 1)$$

$$= \lambda x. \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)\left(e^{2x} - e^x\right) = \lambda x. \frac{1}{4}\left(e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - 2e^x + 1 - e^{-x}\right)$$

$$= \lambda x. \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)$$

$$= \lambda x. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\cdot\frac{\left[4^n - 3^n + 2\cdot 2^n - 2 + \begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n>0\end{cases} - (-1)^n\right]}{n!} x^n$$

ולפיכך,

$$\tilde{d}(n) = \frac{1}{4}\left[4^n - 3^n + 2\cdot 2^n - 2 + \begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n>0\end{cases} - (-1)^n\right]$$

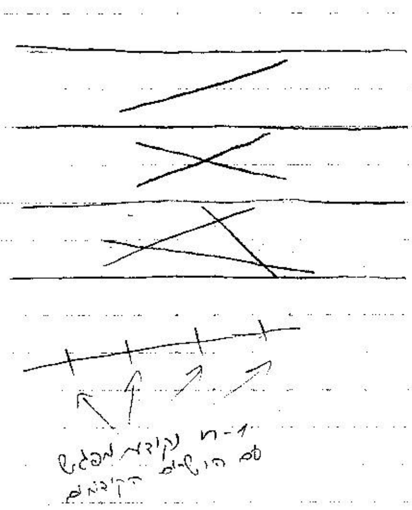
(אפשר לא להתייחס ל-1 הזה שהוא מופיע רק כאשר סכום את הקומבינטוריקה
לא מעניין אותנו בד"כ מקרים כאלה. יש לחלק ס. כדורים. לכן אפשר ליותר חשיבה
רק לצורך פרוט הכתב.)

רקורסיה

דוגמה: מהו $a(n)$, מספר התחומים אליהם מחולק המישור ע"י n ישרים במצב כללי.
(אין אף 2 מקבילים, אף 3 ישרים לא נפגשים בנקודה אחת)

הכלל: $a(n) = a(n-1) + n$ לכל $n > 0$

אך לא נסתפק בזה - נמצא בעזרת הנוסחה הרקורסיבית גם נוסחה ישירה (מחר).



$a(0) = 1$

$a(1) = 2$

$a(2) = 4$

$a(3) = 7$

$a(n) = a(n-1) + \underbrace{\text{מספר התחומים שמחלק לשניים הישר ה-}n}_{n}$