10.3.08

# מתמטיקה בדידה - שיעור

## פונקציות יוצרות:

רקע אלגברי (ללא קשר בינתיים לקומבינטוריקה)

עבור סדרה $a=\lambda n\in\mathbb{N}.a(n)$ של מספרים ממשיים נתבונן בביטוי $\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n$. ונרצה לקשר לו פונקציה $f=\lambda x\in\mathbb{R}.f(x)$ מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$.

ניתן לבצע את הקישור המבוקש במס' דרכים:

① ע"י שימוש בסכום טור אינסופי. לכל $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n$

למשל: אם $a(n)=2^n$ לכל $n$ אז $\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\frac{1}{1-2x}$ לכל $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

② ע"י שימוש בטור מקלורין (טור טיילור סביב 0)

לפונקציה $f=\lambda x.f(x)$ מותאם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

למשל אם $f=\lambda x.e^{3x}$

$f^{(n)}=\lambda x.3^ne^{3x}$ וטור מקלורין של $f$ יהיה $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$

③ ע"י התבוננות ב"התנהגות" האלגברית של הפונק' ושל טורי החזקה, באופן הבא:

אם החלטנו להתאים לסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.a(n)$ את הפונק' $\lambda x.A(x)$ ולסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.b(n)$ את הפונק' $\lambda x.B(x)$ אז יתקיים גם:

$A+B=\lambda x(A+B)(x)=\lambda x.A(x)+B(x)$ קשור ל $\lambda x.(\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n)+(\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n)=$
$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}(a(n)+b(n))x^n$

ואכן שהפונקציה $A+B$ תותאם לסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.a(n)+b(n)$

וגם לגבי כפל: $A\cdot B=\lambda x(A\cdot B)(x)=\lambda x\,A(x)\cdot B(x)$ קשור ל
$\lambda x(\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n)=\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a(k)b(n-k))x^n$

ואכן שהפונקציה $A\cdot B$ תותאם לסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}\sum_{k=0}^{n}a(k)b(n-k)$

מסתבר שכל הגישות מתלכדות לחלוטין!

נראה למשל שההתאמה בין הסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}\frac{\alpha^n}{n!}$ והפונק' $\lambda x\,e^{\alpha x}$ מתקבלת בכל הגישות:

① ע"י התבוננות בשורות בפיתוח טיילור ניתן להוכיח שלכל $x$ ממשי מתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}x^n=e^{\alpha x}$.

② כפי שראינו עבור $\alpha=3$, טור מקלורין של $e^{\alpha x}$ הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}x^n$ (כי הנגזרת ה-n-ית של $\lambda x.e^{\alpha x}$ היא $\lambda x.\alpha^ne^{\alpha n}$)

③

③ ניקח $a=\lambda n\in\mathbb{N}.\frac{\alpha^n}{n!}$ (מותאם ל $\lambda x.e^{\alpha x}$) , $b=\lambda n\in\mathbb{N}.\frac{\beta^n}{n!}$ (מותאם ל $\lambda x.e^{\beta x}$)

ונבדוק שהסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!}$ מותאמת ל $\lambda x.e^{\alpha x}\cdot e^{\beta x}$

לפונק' $\lambda x.e^{\alpha x}e^{\beta x}$ שווה $\lambda x.e^{(\alpha+\beta)x}$ מותאמת הרי הסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}$. לפי נוסחת הבינום: $(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\alpha^k\beta^{n-k}$

ואכן:

$$\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\alpha^k\beta^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}\cdot\frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!}$$

אם הסדרה $a=\lambda n\in\mathbb{N}.a(n)$ מקושרת (לפי 3 הגישות המקבילות שהגדרנו) לפונק' $A=\lambda x.A(x)$ אומרים ש-A יוצרת את הסדרה a. (A היא הפונק' היוצרת של a).

הערה: יש סדרות שאין להן פונק' יוצרת, יש פונקציות שלא יוצרות שום סדרה, אבל פונק' יוצרת לכל היותר סדרה אחת וכל סדרה נוצרת לכל היותר ע"י פונק' אחת.

<u>נתבונן בבעייה קומבינטורית:</u>

נתונים חרוזים ב-3 צבעים (מאגר אינסופי של חרוזים כאלה, חרוזים באותו צבע אינם ניתנים להבחנה). בכמה דרכים ניתן לבנות סידור של חרוזים- חלקם מושחלים על עמוד וחלקם מתפזרים כך שמס' החרוזים הכולל הוא n?

נסמן את התשובה המבוקשת $d(n)$.

אם $0\le k\le n$ מס' החרוזים שנמצאים על העמוד אז מספר הסידורים האפשריים על העמוד הוא $3^k$ (תלישות עם חזרות) ומס' הסידורים האפשריים בתפזורת הוא $S(3,n-k)$. לסיכום: $d(n)=\sum_{k=0}^{n}3^k\cdot S(3,n-k)$

ואם כן הפונק' היוצרת של הסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.d(n)$ היא <u>המכפלה</u> של הפונק' היוצרת של הסדרה $\underbrace{\lambda n\in\mathbb{N}\ 3^n}_{\lambda x.\frac{1}{1-3x}}$ והפונק' $\lambda n\in\mathbb{N}.S(3,n)$

<u>בעייה נוספת</u>: בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים צהובים ל-2 תאים כך שבתא הראשון יהיה מספר זוגי של כדורים ובתא השני מספר הכדורים יהיה כפולה של 5?

פתרון: נסמן את התשובה המבוקשת ב $d(n)$.

עבור $0\le k\le n$ מספר הדרכים לחלק $k$ כדורים לתא הראשון $= \begin{cases} 0 & k \text{ אי־זוגי} \\ 1 & k \text{ זוגי} \end{cases}$ $\to a(k)$

ומספר הדרכים לחלק $n-k$ כדורים לתא השני הוא: $b(n-k) = \begin{cases} 0: & n-k \text{ לא מתחלק ב-5} \\ 1: & n-k \text{ מתחלק ב-5} \end{cases}$

ובדיוק כמו קודם: $d(n)=\sum_{k=0}^{n} a(k)b(n-k)$

ולכן הפונק' היוצרת של הסדרה $(d(n))_{n\in\mathbb{N}}$ היא המכפלה של הפונק' היוצרת של הסדרה $a$ והפונק' היוצרת של הסדרה $b$. כלומר: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n\right)$

הערה: עבור סדרות אלו: $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n=\sum_{n\in\mathbb{N}_{even}} x^n = 1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$

ובאופן דומה: $\sum_{n=0}^{\infty} b(n)x^n=\frac{1}{1-x^5}$

באופן כללי: אם $d(n)$ הוא מספר הדרכים לחלק $n$ כדורים זהים ל-$t$ תאים כך ש~~מספר~~

* מספר הכדורים בתא הראשון חייב להיות שייך לקבוצה $A_1 \subseteq \mathbb{N}$.
* מספר הכדורים בתא השני חייב להיות שייך לקבוצה $A_2 \subseteq \mathbb{N}$.

:

* מס' הכדורים בתא ה-$t$ חייב להיות שייך לקבוצה $A_t \subseteq \mathbb{N}$.

אז הפונק' היוצרת של הסדרה $(d(n))_{n\in\mathbb{N}}$ היא:

$$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n=\lambda x.\left(\sum_{n\in A_1} x^n\right)\left(\sum_{n\in A_2} x^n\right)\cdots\left(\sum_{n\in A_t} x^n\right)$$

דוגמה I: $A_1=A_2=\cdots=A_t=\{0,1\}$.

$d(n)$ - מס' הדרכים לחלק $n$ כדורים זהים ל-$t$ תאים.

כך שבכל תא לא יותר מכדור אחד.

כלומר: $d(n)=C(n,t)=\binom{n}{t}$ לפי נוסחה הכללית שראינו:

$$\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n=\lambda x.\left(\sum_{n\in\{0,1\}} x^n\right)\left(\sum_{n\in\{0,1\}} x^n\right)\cdots\left(\sum_{n\in\{0,1\}} x^n\right)=x^0+x^1$$

כלומר: $\lambda x.\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n=\lambda x.(1+x)^t$ וקיבלנו את נוסחת הבינום:

$$(1+x)^t=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{t}{n}x^n \underset{*}{=} \sum_{n=0}^{t}\binom{t}{n}x^n$$

$\binom{t}{n}=0$ עבור $n>t$

דוגמא II: $A_1=A_2=\cdots=A_t=\mathbb{N}$

$d(n)$ - מספר הדרכים לחלק $n$ כדורים זהים ל-$t$ תאים (ללא כל מגבלות
על מס' הכדורים בתאים): כלומר $d(n)=s(t,n)$ ולפי הנוסחה שקיבלנו:

$$\lambda x \sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n - \lambda x \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right)\cdots\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right.$$

אבל $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$

ואם כן קיבלנו $\lambda x \sum_{n=0}^{\infty} s(t,n)x^n = \lambda x \left(\frac{1}{1-x}\right)^t$

בחזרה לבעיית החרוזים:

ראינו שהפונק' היוצרת עבור סדרת התשובות לבעיית החרוזים היא

$$\lambda x \sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n = \lambda x \left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} s(3,n)x^n\right) = \lambda x \frac{1}{1-3x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \lambda x \frac{1}{(1-3)(1-x)^3}$$

מסתבר (מהבנה אלגברית כללית) שביטוי מהסוג $\frac{1}{(1-3x)(1-x)^3}$
תמיד ניתן להצגה כסכום בצורה כזו:

(פירוק לשברים חלקיים) $\frac{\overset{\frac{27}{8}}{a}}{1-3x} + \frac{\overset{-\frac{9}{8}}{b}}{1-x} + \frac{c^{-\frac{3}{4}}}{(1-x)^2} + \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-3x)(1-x)^3}$

כדי למצוא את $a$ נכפיל את 2 האגפים של השוויון הקודם ב $1-3x$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = a + \frac{b(1-3x)}{(1-x)} + \frac{c(1-3x)}{(1-x)^2} + \frac{d(1-3x)}{(1-x)^3}$$

נציב $x=\frac{1}{3}$ ונקבל: $\frac{27}{8} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^3} = a$

את $d$ ניתן למצוא באופן דומה: נכפיל את 2 אגפי השוויון המקורי ב$(1-x)^3$
ומיד אחרי זה נציב $x=1$: $d = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

כדי לגלות את $b$ ו-$c$ נציב בשוויון שני ערכים (שרירותיים) נוספים:

$x=0$ : $1 = \frac{27}{8} + b + c - \frac{1}{2} \Rightarrow b+c = 1+\frac{1}{2}-\frac{27}{8} = -\frac{15}{8}$

$x=-1$: $\frac{1}{32} = \frac{27}{32} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} - \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{b}{2}+\frac{c}{4} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} b+c = -\frac{15}{8} \\ 2b+c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = -3+\frac{15}{8} = -\frac{9}{8} \\ c = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \end{array}$$

נמשיך בפיתוח:

$$\lambda x \sum_{n=0}^{\infty} d(n) x^n = \lambda x \frac{1}{(1-3x)(1-x)^3} = \lambda x \left[ \frac{\frac{27}{8}}{1-3x} - \frac{\frac{9}{8}}{1-x} - \frac{\frac{3}{4}}{(1-x)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^3} \right]$$

$$= \lambda x \left[ \frac{27}{8} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{9}{8} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} S(2,n) x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} S(3,n) x^n \right]$$

$$= \lambda x \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{27}{8} \cdot 3^n - \frac{9}{8} - \frac{3}{4} S(2,n) - \frac{1}{2} S(3,n) \right] x^n$$

כלומר: $d(n) = \frac{27}{8} 3^n - \frac{9}{8} - \frac{3}{4} S(2,n) - \frac{1}{2} S(3,n) =$

$$S(2,n) = \binom{2+n-1}{n} = \binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{n!\,1!} = n+1$$

$$S(3,n) = \binom{3+n-1}{n} = \binom{n+2}{n} = \frac{(n+2)!}{n!\,2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$\frac{27}{8} 3^n - \frac{9}{8} - \frac{3}{4}(n+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$