2.3.08 ①

מתמטיקה בדידה - שיעור

① השלמת חובות בנושא חזקות של עוצמות
בעיקר נוכיח $\aleph = 2^{\aleph_0}$. למעשה נראה ש- $\aleph = 10^{\aleph_0}$

$$10^{\aleph_0} = |\underbrace{\mathbb{N} \to \{0,1,2,\dots,9\}}_{\text{קבוצת הפונקציות מ-}\mathbb{N}\text{ ל-}\{0,\dots,9\}}|$$

רעיון ההוכחה: נגדיר פונקציה מ- $\mathbb{N} \to \{0,1,\dots,9\}$ ל- $[0,1]$ שמתאימה לכל סדרה אינסופית של ספרות עשרוניות את המספר הממשי שסדרה זו היא הפיתוח העשרוני שלו אחרי הנקודה העשרונית.

כלומר,
$$F = \lambda f \in \mathbb{N} \to \{0,1,\dots,9\}. \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{10^{n+1}}}_{0.f(0)\,f(1)\,f(2)\dots}$$

למשל אם $f = \lambda n \in \mathbb{N}.3$ אז
$$F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{10^{n+1}} = 0.333\dots = \frac{1}{3}$$

__בעיה__ F זו איננה חד-חד ערכית: [כי למשל $F(\lambda n \in \mathbb{N}.\ \text{if } n=0 \text{ then } 4 \text{ else } 9)$
$= 0.4999\dots = \frac{1}{2} = 0.500\dots = F(\lambda n \in \mathbb{N}.\ \text{if } n=0 \text{ then } 5 \text{ else } 0)$]

כדי לפתור את הבעיה נציג את $\mathbb{N} \to \{0,1,\dots 9\}$ כאיחוד של שתי קבוצות:

$$A = \{ f \in \mathbb{N} \to \{0,1,\dots 9\} \mid \exists k \in \mathbb{N}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ (n > k \to f(n) = 0) \}$$

$$B = (\mathbb{N} \to \{0,1,\dots 9\}) - A$$

כעת $\lambda f \in B. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{10^{n+1}}$ היא פונקציה חח"ע ועל מ- B ל- $(0,1]$ ולכן $\aleph = |(0,1]| = |B|$.

באופן דומה $\lambda f \in A. \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot 10^n$ הינה פונקציה שקולה מ- A ל- $\mathbb{N}$.

למשל,
$$G(\lambda n \in \mathbb{N}.\ \text{if } n=0 \text{ then } 5 \text{ else if } n=1 \text{ then } 7 \text{ else } 0) = 5,7,0,0,\dots = 00\dots075 = 75$$

ולסכום,
$$10^{\aleph_0} = |\mathbb{N} \to \{0,1,\dots 9\}| = |\underbrace{A \cup B}_{\text{זרות}}| = |A| + |B| = \aleph_0 + \aleph = \aleph$$

באופן דומה (ע"י שימוש בפיתוח בינארי במקום עשרוני) מקבלים $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

נוכיח אחד מחוקי החזקות

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\alpha}$$

לשם כך ניקח קבוצה A מעוצמה α, קבוצה B מעוצמה β, קבוצה C מעוצמה γ
כך ש- $B \cap C \neq \emptyset$ ונראה ש- $(B \to A) \times (C \to A) \sim (B \cup C \to A)$.

$$G = \lambda f \in B \cup C \to A. \langle \underbrace{\lambda x \in B. f(x)}_{f|_B}, \underbrace{\lambda x \in C. f(x)}_{f|_C} \rangle$$

ובכיוון ההפוך...

$$H = \lambda \langle g,h \rangle \in (B \to A) \times (C \to A).\ g \cup h$$
כאשר מתייחסים לפונקציות כקבוצות של זוגות סדורים.

זו פונקציה בגלל כך ש- h,g פונקציות ו- $B \cap C = \emptyset$. רישום נוסף של H:

$$H = \lambda \langle g,h \rangle \in (B \to A) \times (C \to A).\ \lambda x \in B \cup C.\ \text{if } x \in B \text{ then } g(x) \text{ else } h(x).$$

ש- H ו- G הופכיות זו לזו (שימו לב למקום שבהם משתמשים בכך ש- B ו- C זרות)

!
תרגיל מאוד מומלץ

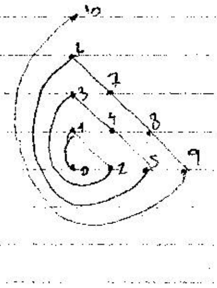
מתמטיקה בדידה - שיעור 2.3.08 (2)

משיעור שתי התרגיל | שראינו היום נקבל

$$\aleph\cdot\aleph = 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$
$$(= 2\cdot 2^{\aleph_0} = 4^{\aleph_0} = \aleph$$ דרך נוספת)

(I) מודגש מבחן

כשמתקרבים למבחן לשים לב שאנו יודעים לעשות את כל החשבונות בין העוצמות ובעיקר בין $\aleph_0$ ו-$\aleph$.



נראה כעת שגם מתקיים $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ ז"א רק ש $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

פונקציה שקולות מ- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$

$$\lambda\langle x,y\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}.\ \underbrace{1+2+3+\dots+(x+y)}_{\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}}+x$$

דרך נוספת:

$$\begin{cases}\langle0,0\rangle,\langle0,1\rangle,\langle0,2\rangle\dots \longrightarrow \text{כל } \mathbb{N} \\ \langle1,0\rangle,\langle1,1\rangle,\langle1,2\rangle\dots \Longrightarrow \text{זוגיים אבל לא מתחלקים ב-4} \\ \langle2,0\rangle,\langle2,1\rangle,\langle2,2\rangle\dots \longrightarrow \text{זוגיים כן ב-4 לא ב-8.}\end{cases}$$

$$\lambda\langle x,y\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}.\ 2^x\cdot(2y+1)-1$$
כדי שגם 0 יכוסה

[המלון של הילברט]
Hilbert

עוד עניין קטן:

$$\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph} = 2^{\aleph}$$ ← "השיא" של העוצמה

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

כדי לחשב את $\aleph_0^{\aleph}$ "נצטרך" לסדר בין עוצמות.

סדר בין עוצמות

מעוניינים להגדיר יחס סדר (חלש) בין עוצמות

כדי להגדיר $\alpha\le\beta$ ניקח A עם עוצמה α ו-B עם עוצמה β. ואז נאמר ש $\alpha\le\beta$ אמ"מ קיימת פונקציה חח"ע מ-A ל-B.

ראשית נבדוק שהדבר מוגדר היטב (כלומר שאין תלות בנציגות של העוצמות) כיצד נראה זאת? איזו טענה יש להוכיח?

<u>טענה:</u> אם A_1, B_1, A_2, B_2 קבוצות המקיימות $A_1\sim A_2$ וגם $B_1\sim B_2$ אז [קיימת פונקציה חח"ע מ-A_1 ל-B_1] אמ"מ [קיימת פונקציה חח"ע מ-A_2 ל-B_2] (מוכיחים באמצעות משחק עם ההרכבות).