25.2.08 (1)

מתמטיקה בדידה - שיעור

הגדרנו כפל בין עוצמות (בקיצור $|A|\cdot|B|=|A\times B|$)

נרצה להגדיר באופן דומה חיבור בין עוצמות

הצעה: $|A|+|B|=|A\cup B|$

לפי הגדרה זו יצא ש: $2+3=|\{7,8\}|+|\{8,9,10\}|=|\{7,8,9,10\}|$

בניגוד לחיבור המוכר לנו בין מספרים טבעיים.

בעיה חמורה יותר: החיבור המוצע כלל לא מוגדר היטב, כלומר התוצאה <u>תלויה</u> בנציגי מחלקות השקילות (הקבוצות הנבחרות עם העוצמות הנתונות) למשל אם נבחר נציגים שונים נקבל: $2+3=|\{7,8\}|+|\{7,8,9\}|=|\{7,8,9\}|=3$

תיקון של ההצעה: כדי להגדיר $\alpha+\beta$ (α,β עוצמות) נבחר קבוצה A עם עוצמה α וקבוצה B עם עוצמה β כך ש $A\cap B=\emptyset$ (B,A זרות זו לזו - תמיד ניתן למצוא כאלו) וכך נגדיר $\alpha+\beta=|A\cup B|$.

עלינו לבדוק שההצעה המשופרת אכן מגדירה <u>היטב</u> פעולת חיבור ולשם כך יש להוכיח את הטענה הבאה:

טענה: אם A_1,B_1,A_2,B_2 קבוצות המקיימות:

$A_1\sim A_2$, $B_1\sim B_2$, $A_1\cap B_1=\emptyset$, $A_2\cap B_2=\emptyset$ אז:

$A_1\cup B_1\sim A_2\cup B_2$

הוכחה: תרגיל (צריך להוכיח ע"י בניית פונקציית שקילות)

תכונות החיבור:

1. אסוציאטיביות $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
2. קומוטטיביות $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
3. $\alpha+0=\alpha$
4. דיסטריבוטיביות $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

הוכחה: תרגיל פשוט.

דוגמאות לחישובים:

(1) $\aleph_0+\aleph_0\overset{?}{=}\aleph_0$

$\aleph_0+\aleph_0=|\mathbb{N}_{even}\cup\mathbb{N}_{odd}|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$

(2) $\aleph+\aleph_0=\aleph$

$\aleph=|\mathbb{R}|=|(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})\cup\mathbb{N}|=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|+|\mathbb{N}|$

נסמן: $\alpha=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}|$ $\longrightarrow$ $\aleph=\alpha+\aleph_0$

נוסיף $\aleph_0$ לשני האגפים: $\aleph+\aleph_0=(\alpha+\aleph_0)+\aleph_0=\alpha+(\aleph_0+\aleph_0)=$

$\alpha+\aleph_0=\aleph$

25.2.08
(2)

מתמטיקה בדידה - שיעור

חישוב ביניים:

$$(0,1] \underset{①}{\sim} [1,\infty) \underset{②}{\sim} [0,\infty) \underset{③}{\sim} (0,\infty) \underset{④}{\sim} \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$|(0,1]| = |[1,\infty)| = |[0,\infty)| = |(0,\infty)| = |\mathbb{R}| = \aleph$$

פונקציות שקילות מתאימות:

① $\lambda x\in(0,1].\ \frac{1}{x}$

ההפוכה: $\lambda y\in[1,\infty).\ \frac{1}{y}$

② $\lambda x\in[1,\infty).\ x-1$

ההפוכה: $\lambda y\in[0,\infty).\ y+1$

③ $\lambda x\in[0,\infty).\ \text{if } x\in\mathbb{N} \text{ then } x+1 \text{ else } x$

ההפוכה: $\lambda y\in(0,\infty).\ \text{if } y\in\mathbb{N} \text{ then } y-1 \text{ else } y$

④ $\lambda x\in(0,\infty).\ \log_2 x$

ההפוכה: $\lambda y\in\mathbb{R}.\ 2^y$

הצעה נוספת:
* $\lambda x\in(0,\infty).\ x-\frac{1}{x}$
* $\lambda x\in(0,\infty)\ \text{if } x>1 \text{ then } 2+x \text{ else } \frac{1}{x}$

כעת נגדיר α^β עבור עוצמות α,β. ניקח A עם עוצמה α, B עם עוצמה β ונגדיר: $\alpha^\beta = |B\longrightarrow A|$

יש לבדוק שזה מוגדר היטב כלומר להוכיח את הטענה הבאה:

טענה: אם A_1, B_1, A_2, B_2 מקיימות $B_1\sim B_2$, $A_1\sim A_2$ אז $(B_1\longrightarrow A_1)\sim(B_2\longrightarrow A_2)$

הוכחה: כיוון ש $A_1\sim A_2$ הרי יש פונקציית שקילות h מ A_1 ל A_2 וכיוון ש $B_1\sim B_2$ הרי יש פונקציית שקילות j מ B_1 ל B_2. עלינו לבנות פונקציית שקילות F מ $B_1\longrightarrow A_1$ ל- $B_2\longrightarrow A_2$

$$F=\lambda f\in B_1\to A_1.\ h\circ f\circ j^{-1}$$

וההפוכה ל F תהיה: $G=\lambda g\in B_2\to A_2.\ h^{-1}\circ g\circ j$

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "j"'] & A_1 \arrow[d, shift right, "h"'] \\ B_2 \arrow[u, shift right, "j^{-1}"'] \arrow[r, dashed, "F(f)"'] & A_2 \arrow[u, shift right, "h^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

25.2.08 ③

מתמטיקה בדידה - שעור

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{G(g)} & A_1 \\ j \downarrow \uparrow j^{-1} & & h \downarrow \uparrow h^{-1} \\ B_2 & \xrightarrow{g} & A_2 \end{array}$$

תכונות החזקה:

① $\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma}$

② $\beta^{\alpha}\cdot\gamma^{\alpha}=(\beta\cdot\gamma)^{\alpha}$

③ $(\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$

④ $\alpha^{1}=\alpha$

⑤ $1^{\alpha}=1$

קבוצה שעוצמה α

$\alpha^{0}=|\phi\to A|=|\{\phi\}|=1$

$0^{\alpha}=|A\to\phi|=\begin{cases}|\phi|=0 & \alpha\neq 0\\ |\{\phi\}|=1 & \alpha=0\end{cases}$

חישוב חזקה היסודי (שנראה בהמשך) $2^{\aleph_0}=\aleph$

דוגמאות של יחסי סדר:

היחס ≤ ב-IR		היחס < ב-IR	
יחס סדר מלא	רפלקסיבי מלא + אנטי סימטרי (חלש) טרנזיטיבי	יחס סדר חזק מלא	אי רפלקסיבי אנטי סימטרי חזק + מלא טרנזיטיבי
היחס ⊆ ב P(IN)		**היחס ⊊ ב- P(IN)**	
יחס סדר (חלש)	רפלקסיבי אנטי סימטרי (חלש) טרנזיטיבי	יחס סדר חזק	אי רפלקסיבי אנטי סימטרי חזק טרנזיטיבי

* יחס R בקבוצה A נקרא יחס <u>אי רפלקסיבי</u> אם ורק אם לכל $a\in A$ $a\not R a$

*① יחס R בקבוצה A נקרא אנטי-סימטריות חזקה אם ורק אם לכל $a,b\in A$: $\neg(aRb\wedge bRa)$

*② יחס R (סדר חזק) בקבוצה A נקרא מלא אם ורק אם לכל $a,b\in A$ $aRb\vee bRa\vee a=b$

*③ יחס R בקבוצה A נקרא אנטי-סימטרי (חלש) אם ורק אם לכל $a,b\in A$: $(aRb\wedge bRa)\to a=b$

* יחס סדר R בקבוצה A נקרא מלא אם ורק אם לכל $a,b\in A$ $aRb\vee bRa$

גרסה נוספת 2*

25.2.08

(4)

מתמטיקה בדידה - שיעור

קשרים בין התכונות:

* אם R אנטי סימטרי חזק אז R אנטי סימטרי (חלש)
* אם R יחס סדר <u>חזק</u> אז R הוא <u>לא</u> יחס סדר (כי רפלקסיבי מול רפלקסיבי)
* אם R יחס סדר אז R <u>לא</u> יחס סדר חזק.
* אם R יחס סדר חזק מלא אז R יחס סדר חזק
* אם R יחס סדר מלא אז R יחס סדר.
* אם R יחס סדר אומרים גם ש R יחס סדר חלקי. (R כבר עשוי להיות מלא או לא)
* אם R יחס סדר חזק אומרים גם ש R יחס סדר חלקי חזק (R כבר עשוי להיות מלא או לא)

	$<$	$\leq$	$\subsetneq$	$\subseteq$
יחס סדר	✗	✓	✗	✓
יחס סדר מלא	✗	✓	✗	✗
יחס סדר חלקי	✗	✓	✗	✓
יחס סדר חזק	✓	✗	✓	✗
יחס סדר חזק מלא	✓	✗	✗	✗
יחס סדר חזק חלקי	✓	✗	✓	✗