24.2.08 (1)

עוצמות.

תהי S קבוצה ("עשירה ככל האפשר") של קבוצות.

נגדיר ב-S יחס $\sim$ שנקרא "שוויון עוצמה" באופן הבא: $A\sim B$ אמ"מ קיימת פונקציה שקילית מ-A ל-B.

אבחנה: אם A,B קבוצות סופיות אז $A\sim B$ אמ"מ מספר האיברים ב-A שווה למספר האיברים ב-B.

בפרט, כאשר A,B סופיות ו-$A\subsetneq B$ אז בודאי $A\not\sim B$. אבחנה זו אינה נכונה כאשר מדובר בקבוצות אינסופיות.

דוגמאות:

1. $\mathbb{N}-\{0\}\subsetneq\mathbb{N}$ אבל $\mathbb{N}-\{0\}\sim\mathbb{N}$ כי למשל $\lambda x\in\mathbb{N}-\{0\}.\,x-1$ היא פונקציה שקילית מ-$\mathbb{N}-\{0\}$ ל-$\mathbb{N}$. (הפונקציה ההפוכה במקרה זה היא $\lambda y\in\mathbb{N}.\,y+1$).
2. $\mathbb{N}_{even}\subsetneq\mathbb{N}$ אבל $\mathbb{N}_{even}\sim\mathbb{N}$ כי למשל $\lambda n\in\mathbb{N}_{even}.\,\frac{n}{2}$ פונקציה שקילית מ-$\mathbb{N}_{even}$ ל-$\mathbb{N}$ (הפונקציה ההפוכה $\lambda n\in\mathbb{N}.\,2n$).
3. $\mathbb{N}_{odd}\subsetneq\mathbb{N}$ כי למשל $\lambda n\in\mathbb{N}_{odd}.\,\frac{n-1}{2}$ פונקציה שקילית מ-$\mathbb{N}_{odd}$ ל-$\mathbb{N}$. הפונקציה ההפוכה $\lambda n\in\mathbb{N}.\,2n+1$.

טענה: $\sim$ יחס שקילות (ב-S).

הוכחה: נבדוק ש-$\sim$ סימטרי, רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

כדי להראות ש-$\sim$ רפלקסיבי, עלינו לוודא ש-$A\sim A$ לכל $A\in S$. זה אכן נכון כי למשל i_A היא פונקציה שקילית מ-A ל-A ($i_A^{-1}=i_A$).

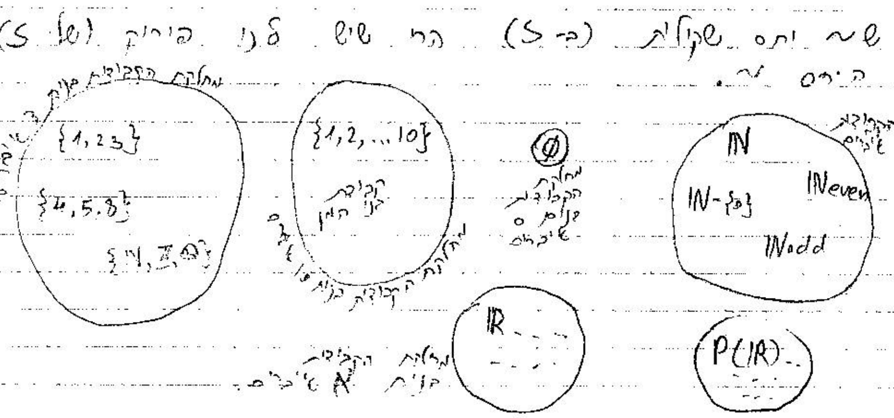
כדי להראות ש-$\sim$ סימטרי, עלינו לוודא שלכל $A,B\in S$ מתקיים $A\sim B\to B\sim A$. נניח ש-$A\sim B$, כלומר קיימת פונקציה שקילית f מ-A ל-B ואז מתקיים $B\sim A$ כי למשל f^{-1} פונקציה שקילית מ-B ל-A ($(f^{-1})^{-1}=f$).

(מ"ז) הצגה חשובה בנושא שקילות קבוצות אינסופיות הכירו

לסיום נראה שהיחס הוא טרנזיטיבי. כלומר שלכל $A,B,C\in S$, אם $B\sim C$, $A\sim B$ אז $A\sim C$.

נניח ש-$A\sim B$ כלומר שקיימת פונקציה שקילית f מ-A ל-B וכן $B\sim C$ כלומר שקיימת פונקציה שקילית g מ-B ל-C ואז גם $A\sim C$ כי למשל $g\circ f$ פונקציה שקילית מ-A ל-C. ($(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$).

כיוון ש-$\sim$ יחס שקילות (ב-S) הרי שיש לנו פירוק (של S) למחלקות שקילות לפי היחס $\sim$.



②

מתמטיקה בדידה - שיעור 12

לכל מחלקת שקילות נתאים סימן ונאמר שלכל קבוצה במחלקת שקילות זו יש עוצמה שסימנה הוא סימן זה.

למשל, למחלקה $\{\{1,2,3\},\{4,5,8\}\ldots\}$ מתאים הסימן 3 ולכן אומרים עוצמת הקבוצה $\{4,5,8\}$ היא 3 ורושמים $|\{4,5,8\}|=3$.

למחלקה בה נמצאת $\mathbb{N}$ (וגם $\mathbb{N}_{even}$, $\mathbb{N}_{odd}$) מתאים הסימן $\aleph_0$ ולכן נאמר העוצמה של $\mathbb{N}$ היא $\aleph_0$ ונרשום $|\mathbb{N}|=\aleph_0$.

למחלקה בה נמצאת $\mathbb{R}$ מתאים הסימן $\aleph$. $|\mathbb{R}|=\aleph$.

חשבון בעוצמות

ננסה להגדיר כפל בין עוצמות. כדי להגדיר את המכפלה קים עבור עוצמות α, β, ניקח קבוצה A עם עוצמה α וקבוצה B עם עוצמה β ונגדיר $|A\times B| = \alpha\cdot\beta$.

עלינו לוודא שהכפל מוגדר היטב (בעצם "ניסיון" להגדיר כפל באופן הבא: $\alpha\cdot\beta$. $\lambda<\alpha,\beta> \in$ קבוצת כל העוצמות × קבוצת כל העוצמות (*). $[A\times B]_\sim$. $\lambda<[A]_\sim,[B]_\sim>\in$ (*)).

כיצד נראה שהכפל מוגדר היטב?
ניקח A_1, A_2 ששתיהן אותה עוצמה α וגם B_1, B_2 ששתיהן גם כן עוצמה β ונראה שגם ל- $A_1\times B_1$ ול- $A_2\times B_2$ אותה עוצמה.

כלומר בעצם יש להוכיח:

טענה: אם $A_1\sim A_2$ וגם $B_1\sim B_2$ אז $A_1\times B_1 \sim A_2\times B_2$.

הוכחה: כיוון ש $A_1\sim A_2$ יש פונקציית שקילות f מ- A_1 ל- A_2, וכיוון ש B_1 ו B_2 הרי יש פונקציית שקילות g מ- B_1 ל- B_2.

נתבונן בפונקציה $\lambda<x,y>\in A_1\times B_1.<f(x),g(y)>$ ונוכל לראות שזו פונקציית שקילות מ- $A_1\times B_2$ ל- $A_2\times B_2$.

(הפונקציה ההפוכה $\lambda<z,w>\in A_2\times B_2.<f^{-1}(z),g^{-1}(w)>$).

דוגמאות: $2\cdot\aleph_0 = ?$

נבחר קבוצה עם עוצמה 2: $\{0,1\}$ ונבחר קבוצה עם עוצמה $\aleph_0$: $\mathbb{N}$.

$2\cdot\aleph_0 = |\{0,1\}\times\mathbb{N}|$ כיוון ש $\mathbb{N}\sim\{0,1\}\times\mathbb{N}$ למשל ע"י פונקציית השקילות:

$\lambda<b,a>\in\{0,1\}\times\mathbb{N}.\ 2a+b$ מ- $\{0,1\}\times\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$.

(הפונקציה ההפוכה $\lambda n\in\mathbb{N}.<n \bmod 2, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor>$) ולכן $2\times\aleph_0=\aleph_0$.

$0\cdot\aleph = ?$

$0\cdot\aleph = |\emptyset\times\mathbb{R}| = |\emptyset| = 0$

כי $\emptyset\times\mathbb{R}=\emptyset$.

מתמטיקה בדידה - שיעור 12

תכונות כפל עוצמות

I $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

II $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$

III $1\cdot\alpha=\alpha$ (לכל עוצמה α)

$0\cdot\alpha=0$ (לכל עוצמה α)

נוכיח למשל את II

לשם כך ניקח קבוצה A עם עוצמה α וקבוצה B עם עוצמה β

לפי ההגדרה: $\alpha\cdot\beta=|A\times B|$ וכן $\beta\cdot\alpha=|B\times A|$.

ומתקיים $A\times B\sim B\times A$ כי למשל הפונקציה $\lambda\langle x,y\rangle\in A\times B.\langle y,x\rangle$

(או בכיתוב פורמלי יותר $\lambda z\in A\times B.\langle\pi_2(z),\pi_1(z)\rangle$. היא פונקציה שקילות מ- $A\times B$ ל- $B\times A$

(הפונקציה ההפוכה $\lambda\langle y,x\rangle\in B\times A.\langle x,y\rangle$) ולכן $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$